ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1983

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

I

Soit F une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^3$ et admettant en tout point $(x , y , z) \in \mathbb{R}^3$ des dérivées partielles secondes continues. $M_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ est un point de $\mathbb{R}^3$ où F s'annule et où $\frac{\partial F}{\partial z}$ ne s'annule pas ; t_0 est un nombre réel donné.

1 - *a.* Vérifier qu'on peut trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ auquel t_0 appartient et tel qu'il existe trois fonctions ξ , η , ζ à valeurs réelles définies sur I, remplissant la condition $(\xi (t_0) , \eta (t_0) , \zeta (t_0)) = M_0$ et vérifiant sur l'intervalle I le système différentiel

$$S \qquad \begin{cases} \xi' (t) = \dfrac{\partial F}{\partial z} [\xi (t) , \eta (t) , \zeta (t)] \\ \eta' (t) = \zeta (t) \dfrac{\partial F}{\partial z} [\xi (t) , \eta (t) , \zeta (t)] \\ \zeta' (t) = - \dfrac{\partial F}{\partial x} [\xi (t) , \eta (t) , \zeta (t)] - \zeta (t) \dfrac{\partial F}{\partial y} [\xi (t) , \eta (t) , \zeta (t)]. \end{cases}$$

b. Montrer que ξ , η et ζ sont deux fois continûment dérivables sur I.

c. Calculer sur I la valeur de $F [\xi (t) , \eta (t) , \zeta (t)]$.

2 - On se propose d'utiliser le système S pour intégrer l'équation différentielle

$$E \qquad F (x , y , y') = 0 .$$

a. Montrer qu'il existe un sous-intervalle ouvert I_1 de I contenant t_0 et sur lequel la restriction de ξ est bijective. En notant φ la fonction réciproque de cette restriction, montrer que $\eta \circ \varphi$ est une solution de E sur l'intervalle $J = \xi (I_1)$.

b. Soit f une solution de E définie sur J et telle que $f (x_0) = y_0$ et $f' (x_0) = z_0$; quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison de $\eta \circ \varphi$ avec f ?

.../...

II

Dans cette partie, F est la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + z\right)^2 - 2y .$$

1 - Préciser géométriquement l'ensemble des points M_0 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les hypothèses du début de la partie I.

2 - Ecrire le système S pour la fonction F considérée et indiquer comment ses solutions se déduisent de celles d'entre elles qui passent par un point (t_0 , M_0) de $\mathbb{R}^4$ tel que $F(M_0) = 0$.

3 - *On s'intéresse désormais aux seules solutions* $M = (\xi , \eta , \zeta)$ *de* S *telles qu'il existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $F(M(t_0)) = 0$.

a. Déterminer explicitement les solutions sur $\mathbb{R}$ du système S qui vérifient la condition qui vient d'être indiquée.

b. Etant donné un point $(t_0 , M_0) = (t_0 , x_0 , y_0 , z_0) \in \mathbb{R}^4$, avec $F(M_0) = 0$, donner une relation entre x_0 et z_0 nécessaire et suffisante pour que celle de ces solutions qui vérifie $M(t_0) = M_0$ ait pour coordonnées des fonctions ξ, η, ζ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Expliciter dans ce cas les trois fonctions ξ, η et ζ.

c. Lorsque la relation précédente entre x_0 et z_0 n'est pas satisfaite, montrer que, M_0 étant fixé tel que $F(M_0) = 0$, il existe un et un seul réel t_0 tel que la solution sur $\mathbb{R}$ de S passant par (t_0 , M_0) vérifie $\eta(0) = 0$.

4 - On suppose réalisés les hypothèses et le choix du réel t_0 décrits dans II.3 - c., et on note encore (ξ , η , ζ) la solution de S obtenue ; on pose en outre $\alpha = -\xi(0)$.

a. Construire la courbe C_α représentée paramétriquement dans le plan Oxy par les équations $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ en précisant ses branches infinies et ses points d'inflexion et de rebroussement éventuels. Comparer C_α et $C_{-\alpha}$.

b. Préciser selon la position du point $(x_1 , y_1) \in \mathbb{R}^2$ combien de courbes C_α passent par (x_1 , y_1).

5 - Ecrire l'équation différentielle E pour la fonction F choisie dans cette partie et déterminer ses solutions polynômiales.

6 - On considère dans le demi-plan ouvert Ω défini par $y > 0$ l'équation différentielle

$$E_1 \qquad y' = -\frac{x}{2} + 2\sqrt{y} .$$

a. Représenter sur un même graphique l'allure de ses diverses solutions.

b. Préciser quels sont les points $(x_1 , y_1) \in \Omega$ par lesquels passe une solution f de E_1 dont le graphe est non borné.

.../...

44

c. Dans ce dernier cas, et en excluant en outre un cas exceptionnel qu'on indiquera, donner trois fonctions à valeurs réelles q_1 , q_2 , q_3 aussi simples que possible et telles que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)\,[\,1 + \varepsilon(x)\,]$$

avec $\lim_{x \to +\infty} q_2(x) / q_1(x) = \lim_{x \to +\infty} q_3(x) / q_2(x) = \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

III

On étudie dans cette partie, pour $(x, u) \in \mathbb{R}^2$, l'équation différentielle

E_2 $\qquad 4uu' - 4u + x = 0$.

1 - Quelle liaison existe-t-il entre les solutions de E_1 et celles de E_2 ?

Désormais, on se propose d'étudier directement les solutions de E_2 *sans intégrer cette équation et sans se servir des résultats ni des méthodes des parties* I *et* II.

2 - ***a.*** Déterminer parmi les points $(x_1 , u_1) \in \mathbb{R}^2$ autres que (0,0) ceux par lesquels ne passe aucune solution de E_2 et ceux par lesquels il passe au moins une solution ; montrer que, dans ce dernier cas, cette solution est localement unique.

b. Comment déduit-on les solutions de E_2 dont le graphe est inclus dans le demi-plan $u < 0$ de celles dont le graphe est inclus dans le demi-plan $u > 0$?

3 - Etudier le sens de variation de la dérivée g' d'une solution g de E_2 dont le graphe est contenu dans le demi-plan $u > 0$.

4 - ***a.*** Soit h une fonction à valeurs réelles continûment dérivable sur un intervalle $[\,a , +\infty\,[$ et telle que la dérivée h' de h ait une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; établir que $\dfrac{h(x)}{x}$ a la même limite lorsque x tend vers $+\infty$. Etablir une propriété analogue lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Soit g une solution de E_2 passant par (x_1, u_1) avec $u_1 > 0$ et $u_1 > \dfrac{x_1}{2}$. Montrer que g est prolongeable en une solution dont l'intervalle de définition contient $[\,x_1 , +\infty\,[$ et préciser la nature de la branche infinie correspondante. g est-elle prolongeable en une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

5 - ***a.*** **En se limitant au demi-plan $u \geqslant 0$, déterminer l'allure du graphe d'une solution de E_2 définie sur un intervalle le plus grand possible, et passant par (x_1 , u_1) avec $0 < u_1 < \dfrac{x_1}{2}$.**

b. **En déduire qu'une infinité de solutions de E_2 passent par l'origine de $\mathbb{R}^2$; comment se comportent au voisinage de cette origine les graphes de ces solutions ?**

6 - **En conclusion, on s'intéresse dans $\mathbb{R}^2$ tout entier aux solutions de E_2 dont l'intervalle de définition est maximal. Dessiner sur un même schéma les graphes des divers types de ces solutions de E_2 et préciser les points de $\mathbb{R}^2$ par lesquels il en passe une et une seule.**

♦ ♦ ♦